Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación
Nivel Superior
Prueba 2

Martes 1 de noviembre de 2022 (mañana)

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

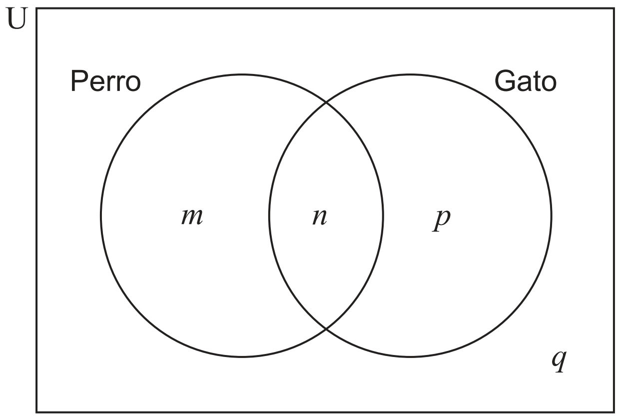
8822 – 7222

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 15]

En la Escuela Primaria Mirabooka hicieron una encuesta y hallaron que el 68% de los alumnos tienen un perro y el 36% de los alumnos tienen un gato. Un 14% de los alumnos tienen ambos, un perro y un gato.

Esta información se puede representar en el siguiente diagrama de Venn, donde m, n, p y q representan el porcentaje de alumnos en cada zona.



(a) Halle el valor de:

(i) m

(ii) n

(iii) p

(iv) q [4]

(b) Halle la probabilidad de que un alumno elegido al azar:

(i) Tenga un perro, pero no tenga un gato.

(ii) Tenga un perro, sabiendo que no tiene un gato. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

Cada año se escoge al azar a un alumno para que sea el capitán escolar de la Escuela Primaria Mirabooka.

Tim utiliza una distribución binomial para predecir cuántos de los próximos 10 capitanes escolares tendrán un perro. Supone que los porcentajes obtenidos en la encuesta se mantendrán constantes en los años venideros y que los sucesos “ser el capitán escolar” y “tener un perro” son independientes.

Utilice el modelo de Tim para hallar la probabilidad de que, en los próximos 10 años:

(c) (i) Haya 5 capitanes escolares que tengan un perro.

(ii) Haya más de 3 capitanes escolares que tengan un perro.

(iii) Haya exactamente 9 capitanes escolares seguidos que tengan un perro. [7]

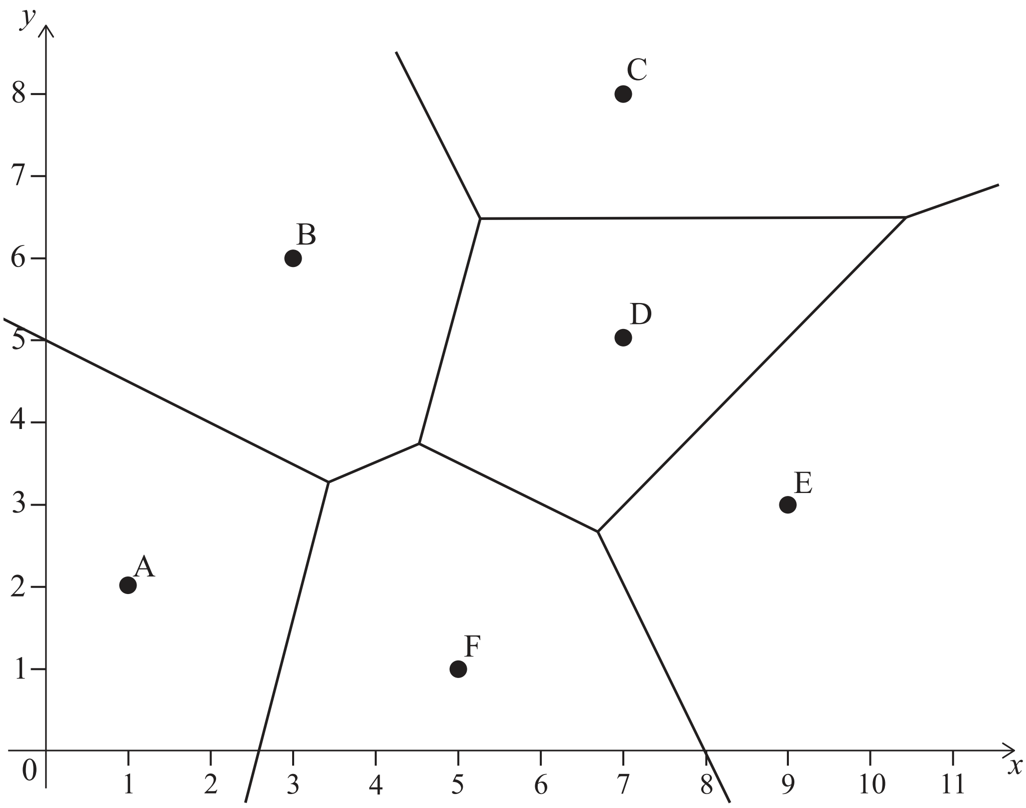
John elige al azar 10 alumnos de entre los que participaron en la encuesta.

(d) Indique por qué John no debería utilizar la distribución binomial para hallar la probabilidad de que 5 de estos alumnos tengan un perro. [1]

Página en blanco

2. [Puntuación máxima: 13]

En la siguiente figura se muestra la ubicación de seis restaurantes (rotulados como A, B, C, D, E y F), junto con el correspondiente diagrama de Voronoi. Todas las distancias se miden en kilómetros.



(a) Elena quiere comer en el restaurante que le quede más cerca. Escriba el restaurante al que Elena debería ir cuando esté en:

(i) $(2\,,\ 7)$

(ii) $(0\,,\ 1)$, si el restaurante A está cerrado [2]

El restaurante C está situado en $(7\,,\ 8)$ y el restaurante D está situado en $(7\,,\ 5)$.

(b) Halle la ecuación de la mediatriz de CD. [2]

El restaurante B está situado en $(3\,,\ 6)$.

(c) Halle la ecuación de la mediatriz de BC. [5]

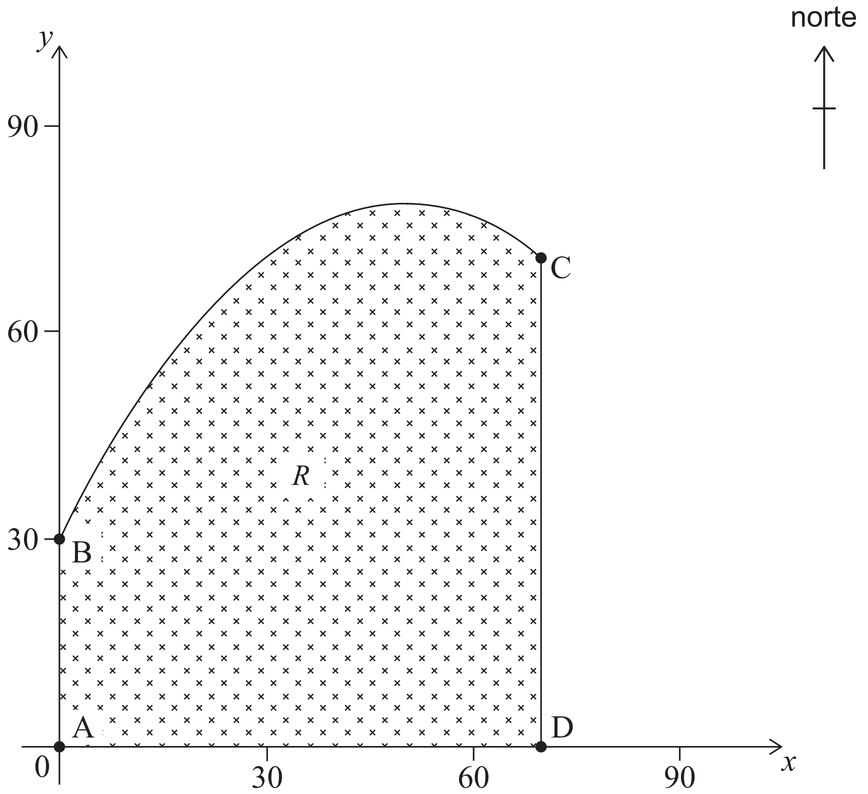
(d) A partir de lo anterior, halle:

(i) Las coordenadas del punto que es equidistante de B, C y D

(ii) La distancia que hay entre este punto y D [4]

3. [Puntuación máxima: 17]

Linda tiene un terreno, representado por la región sombreada R. La planta del terreno se muestra en la siguiente figura; en ambos ejes, los valores indican distancias medidas en metros.



Los segmentos [AB], [CD] y [AD] representan los límites oeste, este y sur del terreno, respectivamente. La función $f(x)$ modeliza el límite norte del terreno entre los puntos B y C, y viene dada por:

$$f(x) = \frac{-x^2}{50} + 2x + 30 \text{, para } 0 \le x \le 70 .$$

(a) (i) Halle $f'(x)$.

(ii) A partir de lo anterior, halle las coordenadas del punto del terreno que está más al norte. [5]

El punto A tiene por coordenadas $(0,\ 0)$, el punto B tiene por coordenadas $(0,\ 30)$, el punto C tiene por coordenadas $(70,\ 72)$ y el punto D tiene por coordenadas $(70,\ 0)$.

(b) (i) Escriba la integral que se puede utilizar para hallar el área de la región sombreada R.

(ii) Halle el área del terreno de Linda. [4]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

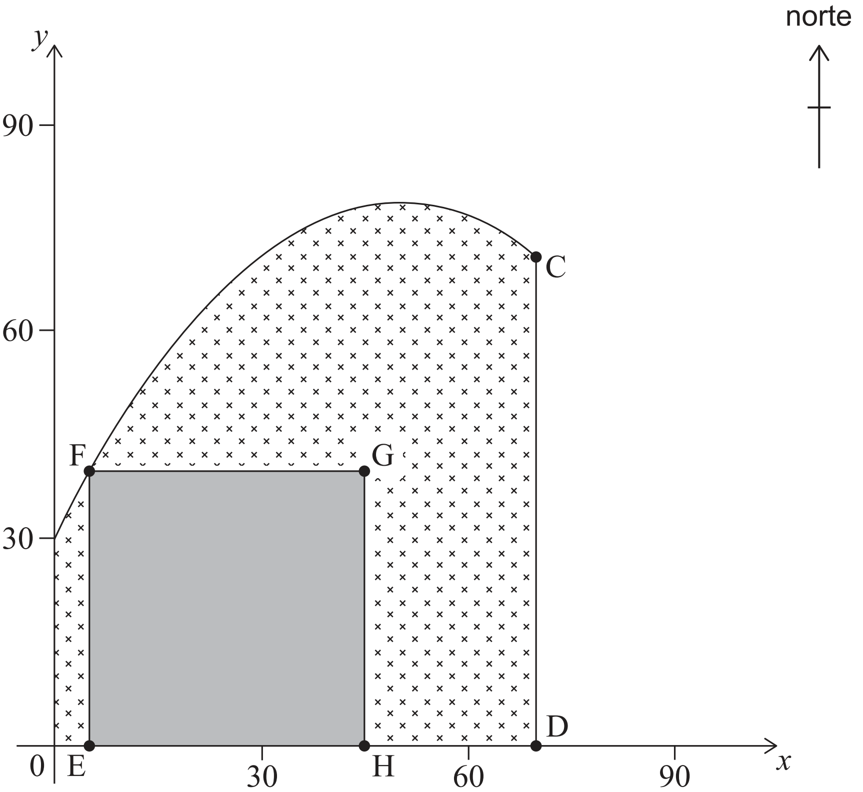
(Pregunta 3: continuación)

Para estimar el área, Linda utilizó la regla del trapecio con diez intervalos. Con este cálculo, subestimó el área en $11{,}4\,\text{m}^2$.

(c) (i) Calcule el porcentaje de error de la estimación de Linda.

(ii) Sugiera qué podría hacer Linda para reducir ese error sin dejar de utilizar la regla del trapecio. [3]

A Linda le gustaría construir un edificio en su terreno. Los cimientos **cuadrados** del edificio (EFGH) se situarán de modo que $[\text{EH}]$ esté sobre el límite sur y el punto F pertenezca al límite norte de la propiedad. En la siguiente figura se muestra una posible ubicación de los cimientos del edificio.



El área de los cimientos cuadrados será máxima cuando $[\text{GH}]$ esté sobre $[\text{CD}]$.

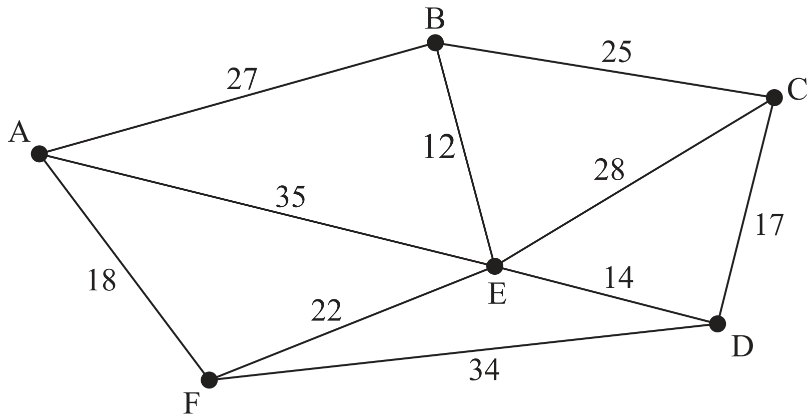
(d) (i) Halle la coordenada x del punto E cuando el área de los cimientos cuadrados del edificio (EFGH) es máxima.

(ii) Halle el área máxima de los cimientos. [5]

4. [Puntuación máxima: 14]

Una empresa tiene seis oficinas: A, B, C, D, E y F. Nanako, que es una directiva de la empresa, tiene que visitar dichas oficinas. Para ello crea el siguiente grafo, que muestra la distancia (en kilómetros) que hay entre algunas de las oficinas.

la figura no está dibujada a escala



(a) Escriba un ciclo hamiltoniano para este grafo. [1]

(b) Indique, de manera razonada, si el grafo contiene un circuito euleriano. [1]

Nanako quiere hallar el ciclo más corto que le permita visitar todas las oficinas. Para ello, decide elaborar la siguiente tabla de adyacencia ponderada, donde se muestra la distancia mínima entre cada par de oficinas.

	A	B	C	D	E	F
A		27	52	p	35	18
B			25	26	12	q
C				17	28	r
D					14	34
E						22
F						

(c) Escriba el valor de:

(i) p

(ii) q

(iii) r [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 4: continuación)

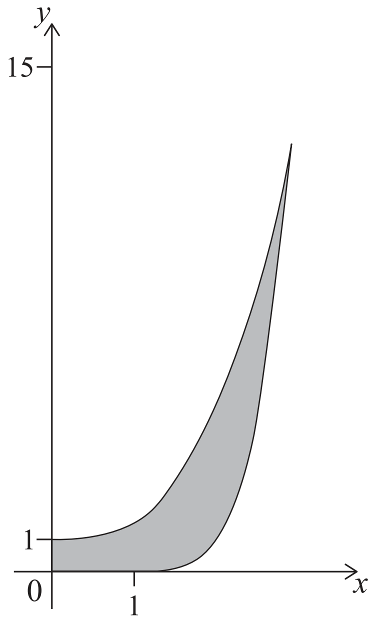
(d) Partiendo del vértice E, utilice el algoritmo del vecino más cercano para hallar un límite superior para el ciclo de Nanako. [3]

(e) Borrando el vértice F, halle un límite inferior para el ciclo de Nanako. [4]

(f) Explique de manera razonada por qué puede que la respuesta dada en el apartado (e) no sea el mejor límite inferior. [2]

5. [Puntuación máxima: 13]

Adesh está diseñando un vaso. El vaso tiene una superficie interior y una superficie exterior. Una parte de la sección transversal del diseño de Adesh se muestra en el siguiente gráfico, donde 1 unidad equivale a $1\,\text{cm}$ y la región sombreada representa el vaso. Las dos superficies se unen en la parte superior del vaso.



La superficie interior se puede modelizar mediante $f(x)=\frac{1}{2}x^3+1$, para $0 \le x \le p$.

La superficie exterior se puede modelizar mediante $g(x)=\begin{cases} 0 & \text{para } 0 \le x < 1 \\ (x-1)^4 & \text{para } 1 \le x \le p \end{cases}$.

(a) Halle el valor de p. [2]

Para terminar el diseño del vaso, se rota la región sombreada de la figura 360° alrededor del eje y.

(b) Halle el volumen de líquido que cabe en el vaso terminado. [5]

(c) Halle el volumen de la región situada entre las dos superficies del vaso terminado. [6]

6. [Puntuación máxima: 18]

Una empresa fabrica puertas para armarios de cocina, las cuales constan de dos capas. La capa interna es de madera, y su espesor sigue una distribución normal de media $7\,\text{mm}$ y desviación típica igual a $0{,}3\,\text{mm}$. La capa externa es de plástico, y su espesor sigue una distribución normal de media $3\,\text{mm}$ y desviación típica igual a $0{,}16\,\text{mm}$. El espesor del plástico es independiente del espesor de la madera.

(a) Halle la probabilidad de que una puerta elegida al azar tenga un espesor total de menos de $9{,}5\,\text{mm}$. [5]

Se va a enviar a un cliente una caja que contiene ocho puertas. La anchura de la caja es igual a $82\,\text{mm}$. Los espesores de las puertas son independientes unos de otros.

(b) Halle la probabilidad de que el espesor total de las ocho puertas sea mayor que la anchura de la caja. [4]

La empresa compra dos máquinas nuevas (A y B) para fabricar las capas de madera. Un empleado afirma que las capas que produce la máquina B son más finas que las capas que produce la máquina A. Para poner a prueba esta afirmación, se toma una muestra aleatoria de cada máquina.

Las siete capas que hay en la muestra procedente de la máquina A tienen los siguientes espesores (en mm):

$$6{,}23;\ 7{,}04;\ 7{,}31;\ 6{,}79;\ 6{,}91;\ 6{,}79;\ 7{,}47.$$

(c) Halle:

(i) La media

(ii) Un estimador sin sesgo de la varianza de la población [3]

Las ocho capas que hay en la muestra procedente de la máquina B tienen un espesor de media $6{,}89\,\text{mm}$ y $s_{\text{n}-1} = 0{,}31$.

(d) Realice un contraste apropiado, a un nivel de significación del 5%, para poner a prueba la afirmación del empleado. Puede suponer que los espesores de las capas de madera que produce cada máquina siguen una distribución normal y que las varianzas de la población son iguales. [6]

7. [Puntuación máxima: 20]

El vector de posición de una partícula en el instante t es $\boldsymbol{r} = 3\cos(3t)\boldsymbol{i} + 4\operatorname{sen}(3t)\boldsymbol{j}$.
El desplazamiento se mide en metros y el tiempo se mide en segundos.

(a) (i) Halle una expresión para la velocidad de la partícula en el instante t.

(ii) A partir de lo anterior, halle la rapidez cuando $t = 3$. [4]

(b) (i) Halle una expresión para la aceleración de la partícula en el instante t.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que la aceleración siempre está dirigida hacia el origen. [4]

El vector de posición de una segunda partícula es $\boldsymbol{r} = -4\operatorname{sen}(4t)\boldsymbol{i} + 3\cos(4t)\boldsymbol{j}$.

(c) Para $0 \le t \le 10$, halle el instante en el que las dos partículas están más próximas entre sí. [5]

En el instante k, donde $0 < k < 1{,}5$, la segunda partícula se está moviendo en paralelo a la primera partícula.

(d) (i) Halle el valor de k.

(ii) Muestre que, en ese instante k, las dos partículas se están moviendo en sentidos opuestos. [7]

Referencias: